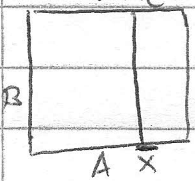
08/03/16



<u>Θεώρημα Fubini</u>: Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$, $B\subset\mathbb{R}^m$ κλειστά ορθογώνια, $f: A\times B\to\mathbb{R}$ ολ/μη (⇒ φραγμένη) ⇒

⇒ $\forall \bar{x}\in A$: $f(\bar{x},\cdot): B\to\mathbb{R}$, $[f(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x},\bar{y})]$ είναι φραγμένη ⇒

⇒ $\forall \bar{x}\in A$: $L_{f(\bar{x},\cdot)}$, $U_{f(\bar{x},\cdot)}$ είναι καλά ορισμένα (στο $\mathbb{R}$) και ισχύει ισχύει $\underbrace{L_{f(\bar{x},\cdot)}}_{\mathcal{L}(\bar{x})} = \underbrace{U_{f(\bar{x},\cdot)}}_{\mathcal{U}(\bar{x})}$

δηλ. $\mathcal{L},\mathcal{U}: A\to\mathbb{R}$ είναι καλά ορισμένες (δηλ. υπάρχουν)

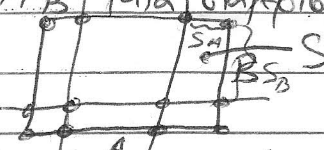
Επίσης οι $\mathcal{L},\mathcal{U}$ είναι φραγμένες [αφού $\forall \bar{x}\in A$: $\inf f\cdot v(B) \le \inf f(\bar{x},\cdot)\cdot v(B) \le L_{f(\bar{x},\cdot)} = \mathcal{L}(\bar{x}) \le \mathcal{U}(\bar{x}) = U_{f(\bar{x},\cdot)} \le \sup f(\bar{x},\cdot)\, v(B) \le \sup f\, v(B)$, δηλ. (σύντομα): $\forall \bar{x}\in A$: $-\infty < \inf f\, v(B) \le \mathcal{L}(\bar{x}) \le \mathcal{U}(\bar{x}) \le \sup f\, v(B) < \infty$]

⇒ $\exists\ L_{\mathcal{L}} \le U_{\mathcal{L}}$ και $L_{\mathcal{U}} \le U_{\mathcal{U}}$ (κάτω κ' άνω ολ/τα των $\mathcal{L},\mathcal{U}$)

Θέλουμε νδο τα $\mathcal{L},\mathcal{U}: A\to\mathbb{R}$ είναι ολ/μα και ισχύει:

(Θεωρ. Fubini) $$\int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{L} = \int_A \mathcal{U}$$

Απόδειξη για το $\mathcal{L}: A \to \mathbb{R}$. Έστω $P = P_A \times P_B$ μία διαμέριση του $A \times B$



με $P_A \in P(A)$ κ' $P_B \in P(B)$

και $S_P = \{S = S_A \times S_B : S_A \in S_{P_A}, S_B \in S_{P_B}\}$

$$\Rightarrow L(f,P) = \sum_{S \in S_P} \inf f|_S \, v(S) = \sum_{S_A \in S_{P_A}} \underbrace{\sum_{S_B \in S_{P_B}} \inf f|_{S_A \times S_B} \, v(S_A \times S_B)}_{\underset{\text{θνδο}}{\le} \inf \mathcal{L}|_{S_A}} (= v(S_A) \cdot v(S_B)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(f,P) \le \sum_{S_A \in S_{P_A}} \inf \mathcal{L}|_{S_A} v(S_A) = L(\mathcal{L}, P_A) \le L_{\mathcal{L}} \Rightarrow L_f \le L_{\mathcal{L}}$$

Αντίστοιχα, ισχύει: $U_{\mathcal{L}} \le U_f$

$$\Rightarrow L_f \le L_{\mathcal{L}} \le U_{\mathcal{L}} \le U_f \xRightarrow{L_f = U_f} \boxed{L_{\mathcal{L}} = U_{\mathcal{L}} = \int_A \mathcal{L} = \int_{A \times B} f}$$

Θνδο: $\inf f|_{S_A \times S_B} \le f(\bar{x}, \bar{y}), \ \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in S_A \times S_B \Rightarrow$

$\Rightarrow$ // $\le \inf f(\bar{x}, \cdot), \ \forall \bar{x} \in S_A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{S_B \in S_{P_B}} \inf f|_{S_A \times S_B} v(S_B)} \le \sum_{S_B \in S_{P_B}} \inf f(\bar{x}, \cdot)|_{S_B} v(S_B) = L(f(\bar{x}, \cdot), P_B) \le L_{f(\bar{x}, \cdot)} = \boxed{\mathcal{L}(\bar{x}), \forall \bar{x} \in S_A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{S_B \in S_{P_B}} \inf f|_{S_A \times S_B} v(S_B) \le \inf \mathcal{L}|_{S_A}}$$

Για το θεώρημα: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $B \subset \mathbb{R}^m$ κλειστά ορθογώνια, $f: A \times B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Αν οι συναρτήσεις $f(\bar{x}, \cdot): B \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες $\forall \bar{x} \in A \Rightarrow \int_{A \times B} f(\bar{x}, \bar{y}) d(\bar{x}, \bar{y}) = \int_A \left(\int_B f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) d\bar{x}$.

Φυσικά ισχύει και το αντίστοιχο, αν οι $f(\cdot, \bar{y}): A \to \mathbb{R}$, $\forall \bar{y} \in B$ είναι ολοκληρώσιμες $\int_{A \times B} f(\bar{x}, \bar{y}) d(\bar{x}, \bar{y}) = \int_B \left(\int_A f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} \right) d\bar{y}$

Παρατήρηση: Όπως θα δούμε, κάθε συνεχής πάνω από κλειστό ορθογώνιο είναι ολοκληρώσιμη $\xRightarrow{\text{Θ. Fubini}}$ Πρόταση: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, συνεχής. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι:

$$\int_A f = \int_A f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_A f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \overset{A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]}{=} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{[a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]} f(x_1, \dots, x_n) d(x_2, \dots, x_n) \right) dx_1 = \dots = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1$$

(*) Η σειρά των ολ/ων δεν παίζει ρόλο.

Υπάρχει και η γραφή: $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$

$$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dx_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dx_n\, f(x_1, \dots, x_n)$$

<u>Παράδειγμα</u>: $\int_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\, d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 (xy+y^2)\, dy \right) dx =$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 (xy+y^2)\, dx \right) dy =$$

$$= \int \left(x \int_0^1 y\, dy + \int_0^1 y^2\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

<u>Παρατήρηση</u>: $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Τότε:

$$\int_{[\alpha,b]\times[c,d]} f(x) g(y)\, d(x,y) = \left(\int_\alpha^b f(x)\, dx \right) \left(\int_c^d g(y)\, dy \right)$$

$h(x,y) = f(x)g(y)$, $[\alpha,b] \times [c,d] \ni (x,y)$

$[(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ τότε $f(x_n) g(y_n) \to f(x_0) g(y_0)]$ άρα h συνεχής

άρα από Θ. Fubini: $\Rightarrow \int_{[\alpha,b]\times[c,d]} f(x) g(y)\, d(x,y) = \int_\alpha^b \left(\int_c^d f(x) g(y)\, dy \right) dx =$

$$= \int_\alpha^b f(x) \left(\int_c^d g(y)\, dy \right) dx$$

<u>Άσκηση</u>: δείτε σημειώσεις (Α.114)

(1) – Υπολογισμός ολ/μων πάνω από $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \neq A \times B$ π.χ. U: κυκλικός δίσκος

(2) Μας ενδιαφέρει ποιες συν/σεις εκτός από τις συνεχείς είναι ολ/μες.

<u>Απάντηση στο (2)</u>: Ισχύει το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας Lebesgue: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $f : A \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε f ολ/μη $\Leftrightarrow$ f είναι συνεχής <u>σχεδόν παντού</u>. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ f συνεχής εκτός από ένα $U \subset A$, μηδενικού μέτρου.

Τι σημαίνει «σύνολο μηδενικού μέτρου»;

<u>Ορισμός</u>: Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ έχει:

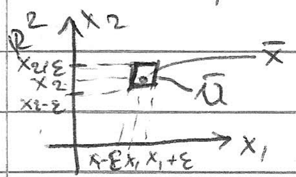
(α) n-διάστατο <u>μηδενικό μέτρο</u> αν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists$ ακολουθία κλειστών ορθογωνίων $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{R}^n$: (i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset A$ και (ii) $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$

(β) n-διάστατο <u>μηδενικό περιεχόμενο</u> αν $\exists$ πεπερασμένο πλήθος ορθογωνίων $(U_i) \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$ τ.ω. $\bigcup_{i=1}^{k} U_i \supset A$ και $\sum_{i=1}^{k} v(U_i) < \varepsilon$.

<u>Παραδείγματα</u>: (α) $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ έχει μηδενικό περιεχόμενο $\Rightarrow$ μηδενικό μέτρο (ισχύει εξ ορισμού, πάντα)

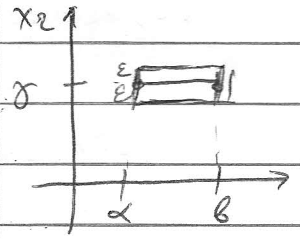
αφού π.χ. $\emptyset \subset \underbrace{[-\varepsilon, \varepsilon] \times \dots \times [-\varepsilon, \varepsilon]}_{=U}$, $\varepsilon > 0$ με $v(U) = (2\varepsilon)^n = 2^n \varepsilon^n$

(β) Κάθε μονοσύνολο $\{\bar{x}\} \subset \mathbb{R}^n$ έχει (n-διάστατο) μηδενικό περιεχόμενο ($\Rightarrow$ μηδενικό μέτρο) π.χ. αν $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $U = [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon] \times \dots \times [x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon]$ με $v(U) = (2\varepsilon)^n$



το $U = [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon] \times [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon]$ έχει $v(U) = (2\varepsilon)^2 = 4\varepsilon^2 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

(γ) Κάθε ευθεία // στους άξονες του $\mathbb{R}^2$ έχει μηδ. μέτρο και κάθε ευθ. τμήμα μιας τέτοιας ευθείας έχει μηδ. περιεχόμενο.

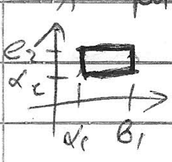


$A = [\alpha, \beta] \times \{\gamma\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \le x \le \beta \;\; y = \gamma\}$

Προφανώς, π.χ. $U = [\alpha, \beta] \times [\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \le x \le \beta, \gamma - \varepsilon \le y \le \gamma + \varepsilon\}$

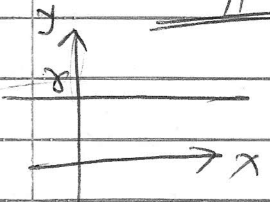
έχουμε $A \subset U$ και $V(U) = (\beta - \alpha) 2\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

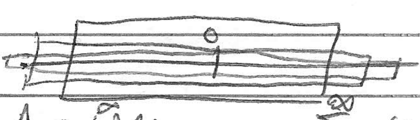
Επίσης κάθε πεπερασμένη ένωση συνόλων μηδ. περιεχομένου, έχει μηδενικό περιεχόμενο. <u>π.χ.</u> το ∂A του κλ. ορθ. $A = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$



έχει μηδ. περιεχόμενο $\Rightarrow$ μηδενικό μέτρο

<u>$\mathbb{R}^2$</u>: Η ευθεία $y = \gamma \in \mathbb{R}^2$ δηλ. το σύνολο $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = \gamma\}$ δεν έχει μηδενικό περιεχόμενο αλλά έχει μηδενικό μέτρο.





<u>Ιδέα</u>: $U_k = [-k, k] \times \left[\gamma - \frac{\varepsilon}{2^{k+2} \cdot 2k}, \gamma + \frac{\varepsilon}{2^{k+2} \cdot 2k}\right]$

$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} v(U_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{k+2}\, 2k} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1} \cdot k} = \dots = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$